Chapitre 3 : Formes différentielles.

1- Formes différentielle de degré 1 dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:

1.1-Définitions:

Soit U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ *ou* 3.

On appelle Forme différentielle de degré 1, toute application w définie sur U à valeurs dans le dual $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

En notant dx_i *la i-ième projection de* $\mathbb{R}^n$ *sur* $\mathbb{R}$, *définie par :*

$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$: $dx_i(h) = h_i$, *la forme différentielle w peut s'écrire :*

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U: \quad w(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\, dx_i$$

Ou $\forall i \in \{1, \dots, n\}$: $P_i : U \to \mathbb{R}$ *sont les fonctions coordonnées de w.*

Dans $\mathbb{R}^2$:

Une forme différentielle w s'écrit :

$$\forall (x,y) \in U \subset \mathbb{R}^2 \quad w(x,y) = P_1(x,y)dx + P_2(x,y)dy$$

telle que :

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2 \quad w(x,y)(h,k) = P_1(x,y)h + P_2(x,y)k$$

Dans $\mathbb{R}^3$:

$$\forall (x,y,z) \in U \subset \mathbb{R}^3$$

$$w(x,y,z) = P_1(x,y,z)\,dx + P_2(x,y,z)\,dy + P_3(x,y,z)\,dz$$

1.2- Propositions :

Proposition 1 :

La forme différentielle w est de classe C^k si et seulement si pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, P_i est de classe C^k.

Proposition 2 :

Soit $f: U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^*$.

La différentielle de f :

$$df: U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \qquad x \longmapsto df(x)$$

est une forme différentielle de degré 1 de classe C^{k-1}.

Ses composantes sont les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$ de telle sorte que :

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Ce qui permet de définir la notion de primitive d'une forme différentielle.

1.3- Formes différentielles exactes :

1.3.1- Définition :

On dit qu'une forme différentielle est exacte sur U s'il existe une fonction $f: U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que : $w = df$.

On dit alors que f est une primitive de w, ou f est un potentiel pour w.

1.3.2- Remarque 1 :

Dans $\mathbb{R}^2$, pour que w soit exacte il faut que P_1 et P_2 soient respectivement les dérivées partielles par rapport à x et y d'une fonction f.

C'est à dire :

$$P_1(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad et \quad P_2(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Par suite, déterminer f revient à résoudre un système d'équations aux dérivées partielles.

Exemple :

La forme différentielle $w = lny \ sinx \ dx - \frac{cosx}{y} \ dy$

est exacte sur $]0,+\infty[$ *.*

Déterminons f :

On a le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = lny \ sinx \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{cosx}{y} \end{cases}$$

En intégrant la première équation, on obtient :

$$f(x,y) - f(0,y) = -lny\,(cosx - 1)$$

$$\Leftrightarrow \ f(x,y) = f(0,y) - lny\,(cosx - 1)$$

Dérivons cette expression par rapport à y, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{1}{y}(cosx - 1) = -\frac{cosx}{y}$$

On en déduit donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = -\frac{1}{y} \Longrightarrow f(0,y) = -lny + C$$

D'où

$$f(x,y) = -lny\,(cosx - 1) - lny + C$$

$$= -lny\,cosx + C$$

1.3.3- Remarque 2 :

Si w est une forme différentielle exacte de classe C^1 sur $U \subset \mathbb{R}^2$, alors d'après le théorème de Cauchy Schwarz on trouve

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial P_2}{\partial x}(x,y)$$

Autrement dit,

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial P_2}{\partial x}(x,y) \quad \Longrightarrow \quad w \ non \ exacte$$

Exemple :

Considérons la forme différentielle

$$w = e^x(x + y)dx + sin(xy)dy$$

On a :

$$P_1(x,y) = e^x(x + y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P_1}{\partial y}(x,y) = e^x$$

Et

$$P_2(x,y) = sin(xy) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P_2}{\partial x}(x,y) = y\,cos(xy)$$

Comme $\frac{\partial P_1}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial P_2}{\partial x}(x,y)$, *on en déduit que w est une forme différentielle non exacte.*

1.4- Formes différentielles fermées :

1.4.1- Définition :

On dit qu'une forme différentielle $w = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\,dx_i$ *est fermée, si pour tout* $i \neq j$ *dans* $[\![1,n]\!]$: $\frac{\partial P_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(x)$

Dans $\mathbb{R}^2$:

La forme différentielle w est fermée si $\frac{\partial P_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial P_2}{\partial x}(x,y)$

Dans $\mathbb{R}^3$:

On dit que w est fermée si $\frac{\partial P_1}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial P_2}{\partial x}(x,y,z)$, $\frac{\partial P_1}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial P_3}{\partial x}(x,y,z)$ *et* $\frac{\partial P_2}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial P_3}{\partial y}(x,y,z)$

On a donc la proposition suivante :

1.4.2- Proposition :

Toute forme différentielle exacte de classe C^1 *est fermée.*

1.4.3- Remarque :

La réciproque est fausse.

Par exemple : la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$w(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

est fermée mais non exacte.

1.5- Théorème de Poincaré :

1.5.1- Définition :

Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ *est dit étoilé s'il existe* $a \in U$ *tel que, pour tout* $x \in U$*, le segment* $[a, x]$ *est inclus dans U.*

1.5.2- Exemples :

1- Une étoile est étoilée.

2- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \; / \; x \leq 0\}$ *est étoilé.*

3- - $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *n'est pas étoilé.*

1.5.3- Théorème de Poincaré :

Si U est un ouvert étoilé et w une forme différentielle sur U, alors :

w est exacte sur U $\Leftrightarrow$ *w est fermée sur U.*

2- Intégrale d'une forme différentielle de degré 1 :

2.1- Définitions :

Soit $w = P_1(x, y, z)dx + P_2(x, y, z)dy + P_3(x, y, z)dz$ *une forme différentielle continue sur un ouvert* $U \subset \mathbb{R}^3$ *et*

$\gamma : [a, b] \to U$ *un arc paramétré de classe* C^1 *défini par :*

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

Définition 1 :

On appelle intégrale de la forme différentielle w suivant le chemin fini γ *le réel :*

$$\int_\gamma w = \int_a^b w\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b P_1(\gamma(t))\, x'(t)\, dt + \int_a^b P_2(\gamma(t))\, y'(t)\, dt + \int_a^b P_3(\gamma(t))\, z'(t)\, dt$$

Exemple :

Soit

$$w(x,y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

Calculons l'intégrale de w suivant le cercle unité :

Soit donc le chemin : $\gamma: [0,2\pi] \rightarrow C(0,1)$ *défini par :*

$$\gamma(t) = (cost, sint)$$

On a alors :

$$\int_\gamma w = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} x'(t) + \frac{x}{x^2 + y^2} y'(t) \right) dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(sin^2(t) + cos^2(t) \right) dt = 2\pi$$

Définition 2 :

On appelle « lacet » dans U, tout chemin : $\gamma: [a,b] \rightarrow U$ *fermé.*

C'est à dire : vérifiant : $\gamma(a) = \gamma(b)$.

2.2- Propositions :

2.2.1- Proposition 1 :

Si w=df est une forme différentielle exacte de classe C^1 *sur U, alors pour tout arc* $\gamma: [a,b] \rightarrow U$ *, on a :*

$$\int_\gamma w = \int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Remarque :

Si w est une forme différentielle exacte et γ est un lacet alors :

$$\int_{\gamma} w = 0$$

On en déduit la proposition :

2.2.2- Proposition 2 :

Soit U un ouvert étoilé.

Une forme différentielle continue w sur U est exacte si et seulement si l'intégrale de w suivant tout lacet dans U est nulle.

Remarque :

Si l'intégrale de w suivant un lacet dans U est non nulle alors w est non exacte.

Exemple :

Pour $w(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, *l'intégrale sur le cercle unité n'est pas nulle, donc w n'est pas exacte.*